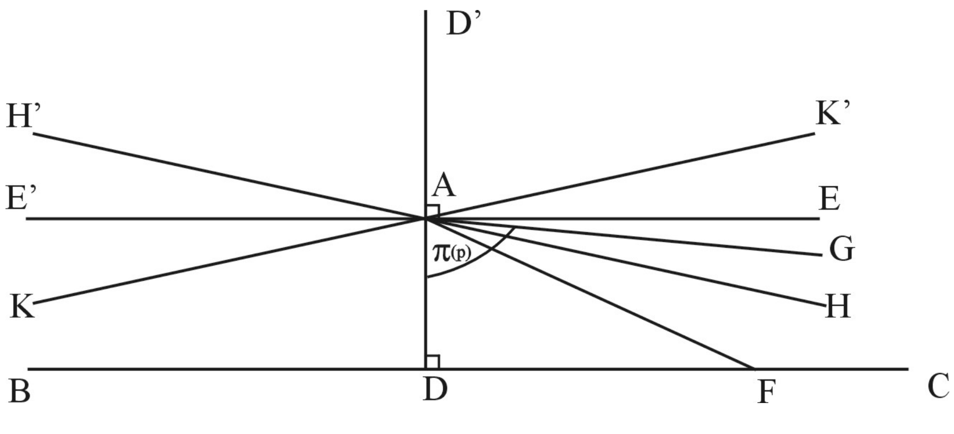
Proposition 16 de la théorie des parallèles de Lobatchevski

16 Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, à savoir: en droites qui coupent la droite donnée, et en droites qui ne la coupent pas. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes est dite parallèle à la droite donnée.

Soit abaissée, du point A (fig. 1), sur la droite B C la perpendiculaire A D et soit élevée au point A, sur la droite A D, la perpendiculaire A E. Dans l'angle droit EA D, il arrivera ou que toutes les droites partant du point A rencontreront la droite D C, comme le fait A F, par exemple, ou bien que quelques-unes d'entre elles, comme la perpendiculaire A E, ne rencontreront pas D C. Dans l'incertitude si la perpendiculaire A E est la seule droite qui ne rencontre pas D C, nous admettrons la possibilité qu'il existe encore d'autres lignes, telles que A G, qui ne coupent pas D C, quelque loin qu'on les prolonge. En passant des lignes A F, qui coupent CD, aux lignes A G qui ne coupent pas CD, on trouvera nécessairement une ligne A H, parallèle à D C, c'est-à-dire une ligne d'un côté de laquelle les lignes A G ne rencontrent pas la ligne CD, tandis que, de l'autre côté, toutes les lignes AF rencontrent CD. L'angle HA D compris entre la parallèle A H et la perpendiculaire A D, sera dit l'angle de parallèlisme, et nous le désignerons par $\pi(p)$ p représentant la distance A D.

Figure 1



Si $\pi(p)$ est un angle droit, le prolongement AE' de la perpendiculaire AE sera également parallèle au prolongement DB de la droite DC et nous ferons remarquer, à ce propos, que, par rapport aux quatre angles formés au point A par les perpendiculaires AE, AD et par leurs prolongements AE', AD', toute droite partant du point A est comprise, soit par elle-même, soit par son prolongement, dans un des deux angles droits dirigés vers BC, de sorte qu'à l'exception de la seule parallèle EE', toutes ces droites, prolongées suffisamment dans les deux sens, devront couper la droite BC.

Si l'on a $\pi(p) < \pi/2$ alors, de l'autre côté de AD, il y aura une autre droite AK, faisant avec AD le même angle DAK = $\pi.(p)$ laquelle sera parallèle au prolongement DB de la ligne DC; de sorte que, dans cette hypothèse, il faut distinguer encore le sens du parallèlisrne. Toutes les autres droites comprises dans l'intérieur des deux angles droits dirigés vers BC appartiennent aux droites sécantes, lorsqu'elles sont situées dans l'angle HAK = $2\pi(p)$ des deux parallèles; elles appartiennent, au contraire, aux droites non sécantes A G lorsqu'elles sont situées de l'autre côté des parallèles AH, AK, à l'intérieur des deux angles EAH $= \pi/2 - \pi(p)$, E'AK $= \pi/2 - \pi(p)$, entre les parallèles et la droite EE', perpendiculaire sur AD. De l'autre côté de la perpendiculaire EE', les prolongements AH', A K' des parallèles AH, AK seront également parallèles à B C. Parmi les autres droites, celles qui sont dans l'angle K'AH' appartiendront aux droites sécantes, celles qui sont dans les angles K'AE, H'AE', aux droites non sécantes.

D'après cela, si l'on suppose $\pi(p) = \pi/2$, les droites ne pourront être que sécantes ou parallèles. Mais, si l'on admet que $\pi(p) <\pi/2$, on devra considérer alors deux parallèles, l'une dans un sens, l'autre dans le sens opposé, de plus, les autres droites devront se distinguer en non sécantes et en sécantes. Dans les deux hypothèses, le caractère du parallèlisme est que la ligne devient sécante par la moindre deviation vers le côté où est située la parallèle de sorte que, si AH est parallèle à DC, toute ligne AF, faisant, du côté de DC, un angle HA F aussi petit que l'on voudra avec AH, coupera nécessairement DC.