La méthode de Rita

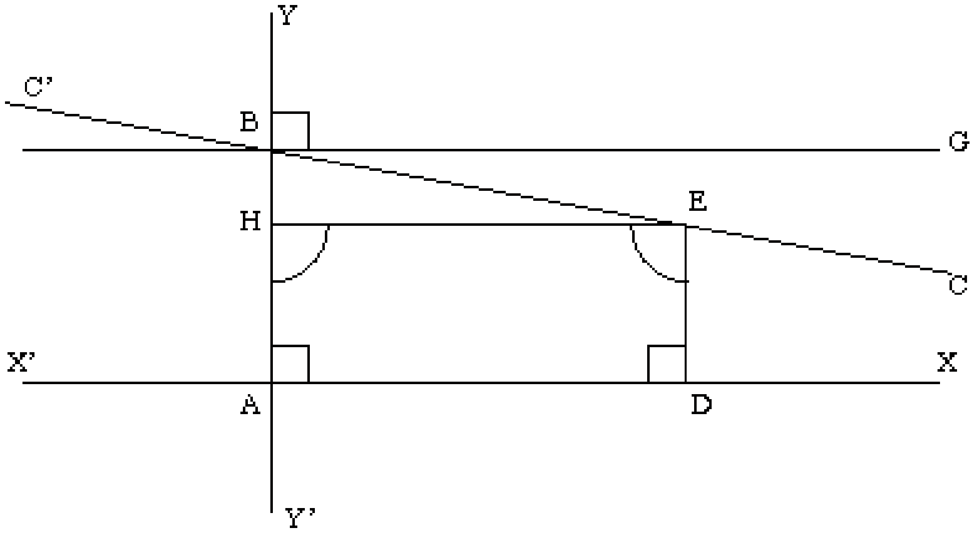
Le but de la méthode de Rita est de prouver que, contrairement à l'affirmation de Lobatchevsky, toutes les parallèles de la géométrie hyperbolique coupent la demi-droite [AX) qu'elles ne doivent pas couper. Cette méthode détecte la plus grave contradiction dans la géométrie hyperbolique et se trouve dans le livre «Les Démonstrations du Théorème de la Parallèle» (page 172).

Démonstration

Dans un plan, soient une droite (XX') et un locpoint B situé en dehors d'elle. Du locpoint B, menons la perpendiculaire [BA] à (XX') et la perpendiculaire (GG') à [BA]. G' est l'extrémité du prolongement à gauche de [BG).

Soit (CC') la parallèle hyperbolique qui fait avec [BA] l'angle de parallélisme ABC = α.

En tout locpoint du segment [BA], il y a deux parallèles hyperboliques à (XX'), l'une [BC) à droite de [BA], et l'autre à sa gauche. Nous raisonnons sur la parallèle hyperbolique [BC). D'après le théorème de la géométrie hyperbolique toutes les parallèles ne doivent pas intersecter entre elles (voir Introduction to NON-EUCLIDEAN GEOMETRY page 70 by Harold E.Wolfe).



Prenons un locpoint E sur (CC') et menons la perpendiculaire [ED] à (XX'). Sur (YY') prenons [HA] = [ED]

Les parallèles hyperboliques entre A et B doivent passer toutes par le segment [ED] inférieur à [BA].

Le quadrilatère ADEH est un quadrilatère de Saccheri. Le côté [EH] ne coupe pas [AX) et entraîne toutes les parallèles hyperboliques comprises entre B et H à la couper, car elles ne peuvent pas couper (CC').

Pour un angle de parallélisme donné α, tout locpoint E situé sur (CC') permet de construire un quadrilatère de Saccheri ADEH.

(CC') et toutes les autres parallèles hyperboliques, entre B et H qui ont des angles de parallélisme plus grands que α, possèdent les propriétés suivantes:

Ces parallèles coupent EH en des locpoints s'y étalent, en ordre croissant, à gauche de E, au fur et à mesure que l'angle de parallélisme croît. Quant à la parallèle hyperbolique en H, elle est nécessairement en- dessous de EH, car son locpoint d'intersection avec DE est en-dessous du locpoint E. Donc, les parallèle hyperbolique au-dessus de H sont forcées de couper EH dans toutes ses positions, tandis que seule la parallèle hyperbolique en H est forcée de rester en-dessous de EH quand l'angle de parallélisme croît à partir de α.

Les propriétés précédentes des parallèles hyperboliques demeurent, quand les deux côtés égaux HA et ED décroissent et tendent vers zéro, et pour HA = ED = 0, EH et la parallèle hyperbolique en H se superposent sur [AX) et entraînent (CC') et les parallèles hyperboliques, entre B et A, à couper [AX).

L'hypothèse de l'angle de parallélisme aigu introduit une contradiction dans la géométrie hyperbolique.

Nous concluons: l'angle ABC = α est un angle droit.

C'est ce qu'il fallait démontrer.